

## ЛЕКЦІЯ №3. АВТОКОЛИВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ У ФІЗИЧНИХ, ХІМІЧНИХ, БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ

### 3.1. Автоколивання в електричному колі

Широке застосування електричних коливальних систем для підсилення, генерування та детектування електромагнітних хвиль було причиною для їх інтенсивного вивчення. В електричному коливальному контурі є передача енергії зовні (тобто система незамкнена), а нелінійність здійснюється внаслідок складної вольт-амперної характеристики.

Розглянемо коливальний контур, зображений на рис. 3.1.  $L, C, R$  — відповідно індуктивність, ємність, активний опір контура;  $E$  — електрорушійна сила;

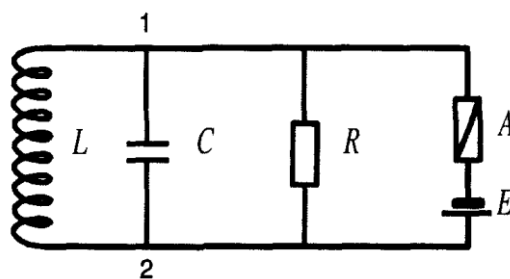


Рис.3.1. Коливальне коло

$A$  — елемент з нелінійною залежністю сили струму від; напруги. Останнім може бути, наприклад, тунельний діод. Залежність сили струму від напруги зображена на рис. 3.2.

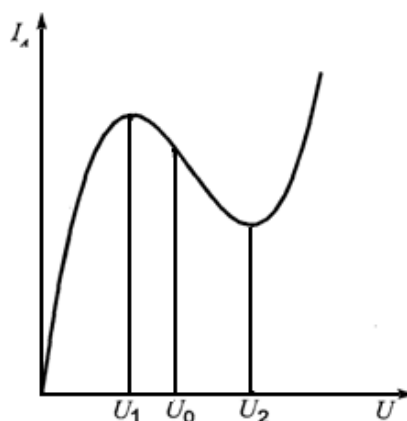


Рис. 3.2. Нелінійна вольт-амперна характеристика

На ділянці  $U_1 < U < U_2$  сила струму зі збільшенням напруги зменшується. Це ділянка від'ємного опору. Для сили струму через конденсатор  $I_c$ , індуктивність  $I_L$  та омичний опір  $I_R$  існують співвідношення:

$$I_c = C \frac{dU}{dt} \quad (3.1)$$

$$L \frac{dI_L}{dt} = U \quad (3.2)$$

$$I_R = \frac{U}{R} \quad (3.3)$$

де  $U$  – різниця потенціалів між точками 1 і 2.

З першого закону Кірхгофа (сума струмів, що входять в точку, дорівнює нулю) випливає

$$I_L + I_c + I_R + I_A = 0 \quad (3.4)$$

Після диференціювання цього співвідношення за часом і використання формул (3.1)—(3.3) матимемо:

$$CL \frac{d^2U}{dt^2} + U + \frac{L}{R} \frac{dU}{dt} + L \frac{dI_A}{dt} = 0. \quad (3.5)$$

Припустимо, що залежність  $I_A$  від  $U$  визначається функцією  $I_A = f(U_A)$ , де  $U_A = U + E$ . Тоді

$$\frac{dI_A}{dt} = \frac{dI_A}{dU} \frac{dU}{dt} = \frac{df}{dU} \frac{dU}{dt}.$$

Враховуючи останній вираз, співвідношення (3.5) може бути переписане у вигляді

$$CL \frac{d^2U}{dt^2} + U + L \left( \frac{1}{R} + f'(E + U) \right) \frac{dU}{dt} = 0. \quad (3.6)$$

За відсутності нелінійного активного елемента ( $f = 0$ ) рівняння (3.6) описує затухаючі коливання електричного контура, що має частоту  $\omega = 1 / (LC)^{1/2}$ .

Автоколивання виникають, коли виконується умова  $\frac{1}{R} + f'(E + U) < 0$ , для чого

необхідно, щоб  $f'(E + U) < 0$ , і, крім того,  $|f'(E + U)| > \frac{1}{R}$ . Ці умови

означають, що на нелінійний елемент потрібно подати таку напругу, аби він працював на спадаючій ділянці вольт-амперної характеристики.

Нехай точка  $U_0 = E$  відповідає перегину функції  $f(U)$ , тобто

$$f''(U_0) = 0 \quad (3.7)$$

Вважаючи відхилення  $U$  від  $U_0$  малим, покладемо

$$f(E+U) = -\alpha U + \gamma U^3, \quad (3.8)$$

де

$$\alpha = -\left(\frac{df}{dU}\right)_{U_0}, \quad \gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3f}{dU^3}\right)_{U_0}.$$

Звідси рівняння (3.5) набуває вигляду

$$U + CL \frac{d^2U}{dt^2} + L\left(\frac{1}{R} - \alpha + 3\gamma U^2\right) \frac{dU}{dt} = 0. \quad (3.9)$$

Введемо позначення

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \varepsilon = \sqrt{L/C}\left(\alpha - \frac{1}{R}\right), \quad U = U_0 \left(\frac{3\gamma}{\alpha - 1/R}\right)^{1/2} \quad (3.10)$$

Підставивши нові позначення, рівняння (3.9) запишемо так:

$$\frac{d^2U}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - U^2) \frac{dU}{d\tau} + U = 0 \quad (3.11)$$

Це рівняння називається рівнянням Ван-дер-Поля, воно є одним з на більш досконало вивчених рівнянь у теорії нелінійних диференції рівнянь. Приведемо його до системи двох рівнянь першого порядку.

Для цього покладемо  $X_1 = U$ ,  $X_2 = \frac{dU}{d\tau}$ . Тоді з (3.11) випливає

$$\frac{dX_1}{d\tau} = X_2 \quad (3.12)$$

$$\frac{dX_2}{d\tau} = -X_1 + \varepsilon(1 - X_1^2)X_2.$$

Особливою точкою цього рівняння є точка  $X_1 = X_2 = 0$ . Стійкість особливої точки визначається знаком дійсної частини  $p$  у характеристичному рівнянні (1.18). Для системи рівнянь (3.12) маємо

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}). \quad (3.13)$$

Із співвідношення (3.13) випливає, що при  $\varepsilon < 0$  (тобто  $\frac{1}{R} > \alpha$ ) особлива точка є стійким фокусом. При  $\varepsilon > 0$  (тобто  $\frac{1}{R} < \alpha$ ) особлива точка є нестійким фокусом і система буде нестійкою щодо виникнення коливань з частотою  $\omega_0$ . Для нестійкої моди  $\varepsilon \geq 0$ ,  $p_{\pm} = \pm i$ ,  $X_1, X_2 \approx \exp(p_{\pm} \tau) = \exp(p_{\pm} i \tau) = \exp(\pm i \omega_0 t)$ .

Отже, точка  $\varepsilon = 0$  є біфуркаційною, при  $\varepsilon > 0$  в системі буде зростати амплітуда коливань з частотою  $\omega_0$ .

Дослідження процесу встановлення коливань потребує розв'язку нелінійного рівняння (3.11). Застосуємо для цього наближений метод Ван-дер-Поля.

### 3.2. Метод Ван-дер-Поля

Метод Ван-дер-Поля є одним з перших методів для дослідження періодичних розв'язків нелінійних рівнянь. Метод удосконалювався і дістав строге математичне обґрунтування в роботах Крилова, Боголюбова, Митропольського [16].

Метод Ван-дер-Поля ґрунтується на наявності двох часових масштабів: швидкого, що визначається основною частотою, і повільного, який характерний для зміни амплітуди з часом для коливань з цією частотою. При вивченні повільного руху можна усереднити по основному періоду коливань. Метод називають також методом усереднення.

Розглянемо рівняння, що є деяким узагальненням рівнянь (3.6) і (3.11):

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = \varepsilon \Phi\left(X, \frac{dX}{dt}\right). \quad (3.14)$$

Вважатимемо, що виконується умова  $\varepsilon \ll 1$ . Отже, в розглядуваній системі коефіцієнт перед нелінійним членом є малим. Шукаємо розв'язок (3.14) у вигляді

$$X = a(t) \sin \psi, \quad (3.15)$$

де

$$\psi = \omega_0 t + \varphi(t), \quad (3.16)$$

а  $a(t)$  і  $\varphi(t)$  – функції часу, які добираються так, щоб співвідношення (3.15) задовольняло рівнянню (3.14). Але оскільки функції дві, а рівняння одне то ця умова не однозначно визначає функції. Будемо вимагати, щоб виконувалась також умова

$$\frac{dX}{dt} = \omega_0 a(t) \cos \psi. \quad (3.17)$$

Підставляючи (3.15) у (3.14) і враховуючи (3.17), отримаємо рівняння

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} \Phi \cos \psi, \quad (3.18)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 a} \Phi \sin \psi, \quad (3.19)$$

де згідно з (3.15) і (3.17)

$$\Phi \left( X, \frac{dX}{dt} \right) = \Phi(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi).$$

Праві частини (3.18) і (3.19) пропорційні малому параметру  $\varepsilon \ll 1$ . Отже  $a(t)$  і  $\varphi(t)$  є повільними функціями часу. Враховуючи це, усереднимо і рівняння для  $a(t)$  і  $\varphi(t)$  по періоду за правилом

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) d\psi. \quad (3.20)$$

Тоді

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} A(a), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 a} B(a),$$

де  $A(a) = \langle \Phi \cos \psi \rangle$ ;  $B(a) = \langle \Phi \sin \psi \rangle$ .

Застосуємо викладений метод для дослідження розв'язків рівняння (3.11).

Тоді

$$\Phi = (1 - X^2) \frac{dX}{d\tau}, \quad \omega_0 = 1. \quad (3.21)$$

Здійснивши усереднення (3.20), матимемо

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{2} a \left( 1 - \frac{\dot{a}^2}{4} \right), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = 0. \quad (3.22)$$

Інтегруючи рівняння (3.22), отримаємо

$$a(\tau) = \frac{2}{(1 + e^{-2\tau})^{1/2}}. \quad (3.23)$$

Таким чином, амплітуда коливань змінюється від 0 при  $\tau \rightarrow -\infty$  до 2 при  $\tau \rightarrow \infty$ . Характерною властивістю автоколивань є незалежність амплітуди від початкових умов.

### 3.3. Еволюція екології типу хижак—жертва

Класичним прикладом періодичних процесів є коливання чисельності популяцій взаємодіючих хижаків і жертв. Позначимо чисельність жертв через  $N_1$ , чисельність хижаків через  $N_2$ . Ними можуть бути зайці й рисі, риби-жертви та риби-хижаки тощо. При постійному запасі продуктів споживання для жертв нелінійна система рівнянь еволюції популяцій має вигляд:

$$\frac{dN_1}{dt} = k_1 A N_1 - k_2 N_1 N_2, \quad (3.24)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = k_2 N_1 N_2 - k_3 N_2. \quad (3.25)$$

Перший член в (3.24) описує зростання популяції, яке враховує народжуваність і смертність;  $A$  — кількість продуктів споживання; другий член — зменшення чисельності  $N_1$  за рахунок знищення хижаками  $N_2$ . У рівнянні (3.25) перший член враховує той факт, що зріст чисельності популяції  $N_2$  можливий за наявності  $N_1$ , другий член пов'язаний зі смертністю хижаків. Система (3.24)—(3.25) є відомою системою рівнянь Лотка—Вольтерра. Введемо безрозмірні змінні:

$$X_1 = \frac{k_2}{k_3} N_1, \quad X_2 = \frac{k_2}{k_1 a} N_2, \quad a = \frac{k_1}{k_3} A, \quad \tau = k_3 t.$$

Тоді з (3.24), (3.25) отримаємо

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= aX_1 - aX_1X_2, \\ \dot{X}_2 &= X_1X_2 - X_2.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Особливими точками системи є:

$$1) X_1^{(1)} = X_2^{(1)} = 0, \quad 2) X_1^{(2)} = X_2^{(2)} = 1.$$

Декремент наростання флуктуації поблизу особливої точки дорівнює

$$p_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -(aX_2^{(s)} - a + 1 - X_1^{(s)}) \pm \sqrt{(aX_2^{(s)} - a - 1 + X_1^{(s)})^2 - 4aX_1^{(s)}X_2^{(s)}} \right).$$

Для особливої точки  $s=1$   $p_+$  і  $p_-$  мають різні знаки і особлива точка є сідовою, тобто нестійкою.

$$\text{Для } s=2 \quad p_{\pm} = \pm i\sqrt{a}.$$

Ця особлива точка є центром. З (3.26) впливає рівняння для фазових траєкторій

$$\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{X_2(X_1 - 1)}{aX_1(1 - X_2)}\tag{3.27}$$

Розділивши змінні в рівнянні (3.27) і виконавши інтегрування, отримаємо рівняння для траєкторій:

$$C = (X_1 - \ln X_1) + a(X_2 - \ln X_2).\tag{3.28}$$

Рівняння (3.28) при різних значеннях сталої  $C$  описує різні траєкторії, які охоплюють особливу точку  $X_1 = X_2 = 1$ . В околі особливої точки при  $|X - 1| \ll 1$  рівняння (3.28) набуває вигляду:

$$2(C - 1 - a) = (X_1 - 1)^2 + a(X_2 - 1)^2,\tag{3.29}$$

тобто фазова траєкторія є еліпсом (рис. 3.3). При значних відхиленнях від особливої точки траєкторія відрізняється від еліпса, проте залишається замкненою (рис.3.3).

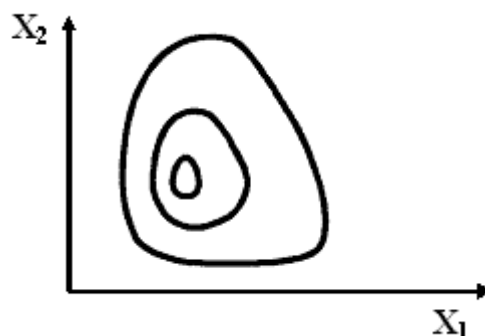


Рис. 3.3. Фазові траєкторії системи Лотка-Вольтера

Чисельність популяцій  $X_1$  і  $X_2$  періодично змінюється з часом (див. рис. 3.4, де представлені результати чисельного розв'язку системи (3.26)). Максимуми  $X_1$  і  $X_2$  зміщені, що відображає конкуренцію взаємодіючих популяцій. При максимумі  $X_1$  наявне максимальне значення «продуктів споживання» для  $X_2$  і, отже  $X_2$  зростає, при цьому  $X_1$  зменшується; при зменшенні  $X_1$  з'являється нестача «продуктів споживання» для  $X_2$  і чисельність  $X_2$  спадає, що приводить до зростання  $X_1$ .

Розглянуті розв'язки не є асимптотично стійкими. Флуктуації виводять систему на іншу траєкторію на відміну від розв'язків, розглянутих у попередньому підрозділі.

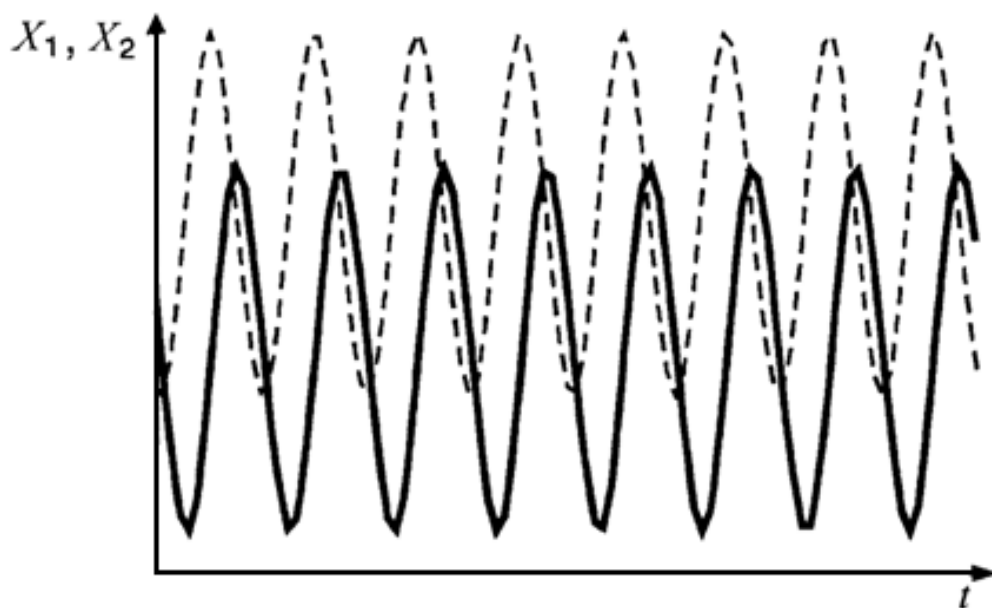


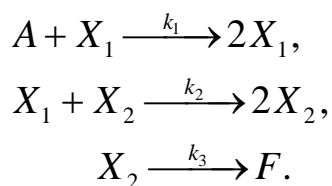
Рис. 3.4. Залежність від часу чисельності популяцій

### **3.4. Коливальні хімічні реакції. Реакція Білоусова—Жаботинського**

Дослідження автоколивань у хімічних реакціях зосереджують особливу увагу науковців протягом останніх двадцяти років. Це пояснюється незвичністю кінетики реакцій, а також можливістю їх використання моделі для одержання важливих наслідків фундаментального і прикладного значень у нерівноважних системах.



Найпростіша хімічна реакція, яка має періодичну в часі поведінку зображується у вигляді



При сталій концентрації вихідної речовини залежність концентрації компонент  $X_1$  і  $X_2$  від часу описується рівняннями:

$$\frac{dC_1}{dt} = k_1 C_A C_1 - k_2 C_1 C_2, \quad (3.30)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = k_2 C_1 C_2 - k_3 C_2. \quad (3.31)$$

Система (3.30), (3.31) збігається із системою рівнянь (3.24), (3.25), проаналізованою в попередньому підрозділі. Збігаються також висновки з розв'язків цих рівнянь, згідно з якими в розглядуваній хімічній реакції повинні спостерігатись періодичні зміни концентрації.

Прикладом коливальної хімічної реакції є реакція Білоусова—Жаботинського, яка відкрита Білоусовим і докладно та всебічно досліджена Жаботинським. Реакція проявляється в періодичній зміні кольору розчину сульфату церію, сірчаної кислоти, малонової кислоти і бромиду калію. Колір розчину залежить від надлишку іонів церію  $Ce^{3+}$  або  $Ce^{4+}$ . У першому випадку розчин має червоний колір, у другому — синій. В процесі реакції відбувається окислення і відновлення іонів церію, що призводить до коливань кольору. Існують різноманітні математичні моделі реакції, проте остаточно механізм реакції не з'ясований.

Реакція Білоусова—Жаботинського є базовою моделлю, на якій проаналізовано багато аспектів явищ самоорганізації в нерівноважних системах. На реакції Білоусова—Жаботинського спостерігались просторові структури, автохвильові процеси, з якими ми ознайомимося в наступних розділах. Вивченню реакції присвячено багато наукових праць і конференцій. Докладні дослідження періодичних хімічних реакцій викладено в монографіях [25], [26].

### ***3.5. Синхронізація автоколивань***

Актуальною в теорії автоколивань є задача про поведінку сукупності взаємодіючих між собою автоколивальних систем, а також систем, які знаходяться під дією періодичної зовнішньої сили. Такі задачі виникають при вивченні коливань зв'язаних електричних генераторів, лазерів, хімічних і біологічних автоколивальних систем. Одним з характерних проявів взаємодії систем є синхронізація коливань. Явище синхронізації полягає і тому, що при певних умовах частота автоколивальної системи визначається частотою зовнішньої сили, або в системі взаємодіючих автоколивальних систем виникає одна чи кілька автоколивальних частот усієї системи в цілому. Автоколивальні частоти взаємодіючих нелінійних систем суттєво відрізняються від спектра взаємодіючих лінійних осциляторів. Внаслідок взаємодії  $N$  осциляторів замість частот коливань окремих осциляторів виникає  $N$  нових частот (мод), причому в коливанні кожної моди беруть участь усі осцилятори. Так, об'єднання молекул у кристал призводить до виникнення замість коливань окремих молекул зон оптичних коливань. У той же час для  $N$  взаємодіючих автоколивальних систем за певних умов може існувати лише одна синхронна (однакова) частота. Синхронізовані коливання проявляються в певній області значень параметрів системи. Положення і величина цієї області визначаються розкидом значень частот окремих систем, амплітудами коливань, характером зв'язку між системами. Для ознайомлення з явищем синхронізації в наступних підрозділах проаналізуємо два приклади.

#### ***3.5.1. Синхронізація коливань в автоколивальній системі за наявності зовнішньої періодичної сили***

Розглянемо генератор, який знаходиться під дією зовнішньої сили, ще періодично залежить від часу. Як побачимо, при малій різниці між частотою автоколивальної системи і частотою зовнішньої сили стійкий рух відбувається з частотою зовнішньої сили. Це явище називається вимушеною синхронізацією або захопленням. Завданням теорії є визначення інтервалу різниці частот, при якій має місце захоплення. Зовні цієї області відбувається складний рух, що

складається з рухів, що мають частоту зовнішньої сили, і автоколивальної системи (зміненої під дією зовнішньої сили)!

Схема вмикання зовнішнього періодичного навантаження в генератор зображена на рис. 3.5. Нехай навантаження являє собою напругу, яка

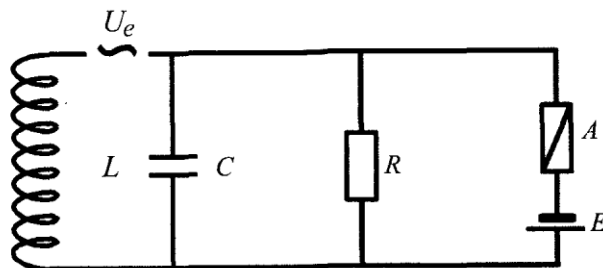


Рис. 3.5. Генератор з прикладеною напругою

ввімкнена послідовно до індуктивності й змінюється за законом  $U_e = U_1 \sin \omega t$ . Рівняння для різниці потенціалів між точками 1 і 2 можна отримати аналогічно доведенню рівняння для коливань в електричному колі (3.5), в якому потрібно в співвідношенні (3.2) зробити заміну  $U$  на  $U - U_e = U - U_1 \sin \omega t$ . Отже, матимемо:

$$CL \frac{d^2 U}{dt^2} + U + \frac{L}{R} \frac{dU}{dt} + L \frac{dI_A}{dt} = U_1 \sin \omega t. \quad (3.32)$$

У безрозмірних одиницях, враховуючи вольт-амперну характеристику (3.8), рівняння може бути переписане у вигляді:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + X + \Phi(X) \frac{dX}{dt} = \lambda \sin \tau + \eta X, \quad (3.33)$$

де

$$\Phi(X) = \frac{\omega_0^2 L}{\omega} \left( \frac{1}{R} + f'(XU_0) \right), \quad X = \frac{U}{U_0}, \quad (3.34)$$

$$\tau = \omega t, \quad \lambda = \frac{U_1 \omega_0^2}{U_0 \omega^2}, \quad \eta = \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right).$$

Величина  $\eta$  характеризує розладнання частот коливань генератора та змущувальної сили.

Проаналізуємо можливість існування розв'язків рівняння (3.33) з частотою, що збігається з частотою зовнішньої сили. Використовуючи метод Ван-дер-Поля (див. 3.2), введемо повільні змінні  $a(\tau)$  і  $\varphi(\tau)$  й шукаємо розв'язок у вигляді

$$X = a(\tau) \cos \psi, \quad \frac{dX}{d\tau} = -a(\tau) \sin \psi, \quad (3.35)$$

де  $\psi = \tau + \varphi(\tau)$ .

Підставивши (3.35) у (3.33) і усереднивши ліву та праву частини рівняння то, матимемо рівняння для  $a(\tau)$  і  $\varphi(\tau)$ :

$$2 \frac{da}{d\tau} = D(a)a - \lambda \cos \varphi, \quad (3.36)$$

$$2 \frac{d\varphi}{d\tau} = -\eta + \frac{\lambda \sin \varphi}{a},$$

де

$$D(a) = \varepsilon \frac{\omega_0}{\omega} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right). \quad (3.37)$$

Існування коливань з частотою змущувальної сили визначається умовою наявності стійких стаціонарних розв'язків системи (3.36). У стаціонарному випадку

$$aD(a) = \lambda \cos \varphi, \quad \eta a = \lambda \sin \varphi, \quad (3.38)$$

або

$$a^2 (D^2(a) + \eta^2) = \lambda^2. \quad (3.39)$$

Дослідження стійкості стандартними методами приводить до такого значення  $p$ :

$$2p = D \pm \left( D'a \pm \sqrt{D'^2 a^2 - 4\eta^2} \right), \quad (3.40)$$

де  $D$  і похідна  $D'$  визначаються в точці  $a$ , яка є розв'язком рівнянь (3.39).

У випадку допорогового режиму ( $D < 0$ ) система (3.35) при довільних значеннях  $\eta$  має єдиний стійкий розв'язок, який відповідає вимушеним коливанням контура на частоті змущувальної сили. Наявність активного елемента в схемі приводить до сплюснення зверху залежності  $a(\eta)$ .

При виконанні умов, необхідних для виникнення автоколивань ( $D > 0$ ), коливання на частоті змущувальної сили існують лише при деяких значеннях параметра розладнання частот. Оцінку величини цієї області можна здійснити, вважаючи, що при малих значеннях  $\eta$  амплітуди змущених коливань і коливань у режимі автоколивань ( $D(a_0) = 0$ ) мають однаковий порядок. Тоді з (3.38) випливає, що стаціонарний розв'язок існує, якщо виконується умова

$$|\eta| \leq \eta_0 = \lambda / a_0 \quad |\omega - \omega_0| \leq \lambda \omega / 2a_0 \quad (3.41)$$

Це співвідношення показує, що ширина смуги синхронізації пропорційна відношенню амплітуди зовнішньої дії до амплітуди коливань в автоколивальному режимі. Зовні цієї області має місце змішування змущених коливань і автоколивань (режим биття). Схематично залежність амплітуди автоколивань від параметра  $\eta$  зображена на рис. 3.6, де суцільна крива – амплітуда змущених коливань, штрихпунктирна — амплітуда автоколивань.

За великих значень зовнішньої дії можлива синхронізація на частоті змущених коливань, якщо вона є кратною до частоти коливань генератора.

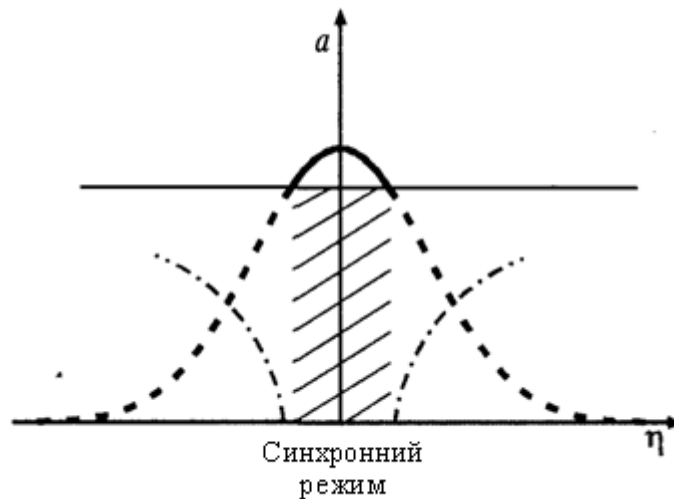


Рис. 3.6. Залежність амплітуди автоколивань від розладнання частоти

### 3.5.2. Синхронізація зв'язаних генераторів

Якщо частоти коливальних взаємодіючих систем істотно відрізняються то генератори працюють незалежно. У системах з близькими частотами в певній області розладу частот окремих генераторів виникають коливання однієї частоти, величина якої визначається взаємодією між системами, амплітудою коливань окремих систем і розладнанням частот.

Для зв'язаних осциляторів напруга на одному генераторі залежить від напруги на іншому. Ця залежність визначається характером зв'язку між генераторами. Якщо генератори зв'язані через ємність, то рівняння кожного з них має вигляд рівняння (3.9), яке потрібно доповнити доданком пропорційним похідній другого порядку за часом від напруги на іншому генераторі. Для двох зв'язаних генераторів система рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_1}{dt^2} + \omega_1^2 U_1 - \Phi_1(U_1) \frac{dU_1}{dt} - \alpha_1 \frac{d^2 U_2}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2 U_2}{dt^2} + \omega_2^2 U_2 - \Phi_2(U_2) \frac{dU_2}{dt} - \alpha_2 \frac{d^2 U_1}{dt^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

де  $\omega_1$  і  $\omega_2$  — власні частоти окремих генераторів;  $\Phi_1(U_1)$  і  $\Phi_2(U_2)$  — нелінійні функції типу (3.34), які визначаються активними елементами контурів і омичними втратами енергії;  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  — коефіцієнти зв'язку між генераторами.

Розв'язуючи систему (3.42) за допомогою метода Ван-дер-Поля, покладемо

$$\begin{aligned} U_1 &= a_1(t) \cos(\omega_0 t - \varphi_1(t)), \\ U_2 &= a_2(t) \cos(\omega_0 t - \varphi_2(t)), \end{aligned} \quad (3.43)$$

де  $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ,  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  — функції, що повільно змінюються з часом;  $\omega_0 t - \varphi_1(t)$  — фаза коливань першого генератора;  $\omega_0 t - \varphi_2(t)$  — фаза коливань другого генератора.

Для усереднених рівнянь отримаємо:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{2} D_1(a_1) a_1 + \frac{\alpha_1 \omega_0}{2} a_2 \sin \varphi, \quad (3.44)$$

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{1}{2} D_2(a_2) a_2 + \frac{\alpha_2 \omega_0}{2} a_1 \sin \varphi, \quad (3.45)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \eta_1 - \frac{\alpha_1 \omega_0}{2} \frac{a_2}{a_1} \cos \varphi, \quad (3.46)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \eta_2 - \frac{\alpha_2 \omega_0}{2} \frac{a_1}{a_2} \cos \varphi, \quad (3.47)$$

де  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ;  $\eta_{1(2)} = \omega_0 - \omega_{1(2)}$ ;  $D_{1(2)}(a_{1(2)})$  — функція типу (3.36).

З (3.46) (3.47) для різниці фаз одержимо рівняння

$$\frac{d\varphi}{dt} = \eta - \frac{\omega_0}{2} \left( \alpha_2 \frac{a_1}{a_2} - \alpha_1 \frac{a_2}{a_1} \right) \cos \varphi. \quad (3.48)$$

Дослідимо стаціонарні розв'язки системи рівнянь (3.44) – (3.47). Припустимо, що зв'язок між генераторами є слабким, і знайдемо розв'язок методом послідовних наближень. У нульовому наближенні значення амплітуд  $a_1^0, a_2^0$  визначаються умовами  $D_1(a_1^0) = 0$  і  $D_2(a_2^0) = 0$ . Для наступних наближень маємо

$$a_1 = a_1^0 + \delta a_1, \quad (3.49)$$

де

$$\delta a_1 = - \frac{\alpha_1 \omega_0 a_2 \sin \varphi}{a_1 \frac{dD_1(a_1)}{da_1}}. \quad (3.50)$$

Аналогічно

$$a_2 = a_2^0 + \delta a_2, \quad (3.51)$$

$$\delta a_2 = - \frac{\alpha_2 \omega_0 a_1 \sin \varphi}{a_2 \frac{dD_2(a_2)}{da_2}}.$$

Для синхронних режимів частоти генераторів однакові ( $\omega = \omega_0 - \dot{\varphi}_1 = \omega_0 - \dot{\varphi}_2$ ). Ці частоти можуть бути одержані із співвідношень (3.46), (3.47) при  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$ .

$$\omega = \omega_2 + \frac{\alpha_2 \omega_0}{2} \frac{a_1^0}{a_2^0} \cos \varphi, \quad (3.52)$$

де

$$\cos \varphi = \frac{2\eta}{\omega_0 \left( \alpha_2 \frac{a_1^0}{a_2^0} - \alpha_1 \frac{a_2^0}{a_1^0} \right)}. \quad (3.53)$$

Із співвідношення (3.53) визначається різниця фаз залежно від розладнання частот генераторів і коефіцієнтів зв'язку між генераторами. Потім за формулами (3.49)—(3.52) визначаються амплітуди коливань зв'язаних генераторів і

синхронна частота  $\omega$ . Ширина області існуючих синхронних коливань визначається з (3.53) за умови, що завжди  $|\cos \phi| \leq 1$ .

$$\eta_{\max} = \frac{\omega_0}{2} \left( \alpha_2 \frac{a_1^0}{a_2^0} - \alpha_1 \frac{a_2^0}{a_1^0} \right). \quad (3.54)$$

Із співвідношень (3.49)—(3.51) випливає, що коли амплітуда коливань першого генератора набагато менша за амплітуду коливань другого генератора ( $a_1^0 \ll a_2^0$ ), то амплітуда більш потужного генератора змінюється неістотно. При цьому частота синхронних коливань також близька до частоти потужнішого генератора. Тому цей генератор є захоплюючим. При рівних амплітудах можливі два режими генерації, що відрізняються типом генератора, який відіграє роль захоплюючого.

У системі генераторів, пов'язаних провідністю, у випадку слабкого зв'язку існує одна стійка синхронна частота, квадрат якої дорівнює середньому арифметичному квадрату частот окремих генераторів з вагою, пропорційною потужності.

Синхронізація автоколивань відбувається також у просторі. У реальних системах завжди існує деяка неоднорідність розподілу в просторі температури концентрацій, параметрів, що характеризують зовнішні умови. Все приводить до розкиду частот автоколивань у різних областях простору. Проте за наявності зв'язку між областями в системі встановлюється синхронний режим автоколивань. У математичному розумінні така синхронізація полягає в тому, що в системі нелінійних рівнянь у частинних похідних з коефіцієнтами, залежними від координат, може існувати стійкий розв'язок, в якому динамічні змінні періодично змінюються з часом.